# Boundary integral equation methods for the calculation of complex eigenvalues for open spaces( Abstract_要旨 )

AUTHOR(S):

Misawa, Ryota

（ 続紙 1 ）

| 京都大学 | 博士（情報学） | 氏名 | 三澤 亮太 |
|---|---|---|---|
| 論文題目 | Boundary integral equation methods for the calculation of complex eigenvalues for open spaces<br>(開空間の複素固有値計算に対する境界積分方程式法) | | |

（論文内容の要旨）

本論文は，導波路問題を含む，開空間の波動散乱問題の固有値の境界積分方程式法(Boundary Integral Equation Method, BIEM)による数値計算を論じたものである．

導波路問題の固有値は物理的には共鳴周波数に相当し，特に実数の固有値はこれまで物理学や工学の直接的な興味の対象として多数の研究が行われてきている．一方，導波路を含む無限領域中の波動散乱問題には複素固有値が存在し，これらもまた物理現象に影響を与えるため，興味深い研究対象である．しかしこれらの複素固有値を数値的に決定することは必ずしも容易ではない．実際，有力な数値計算法である差分法や有限要素法を用いた場合，無限領域を打ち切る必要が生ずることと，無限遠方において解が指数的に増大する形の放射条件を取扱わなければならないことが大きな問題となる．そこで本論文は，無限領域の打ち切りを必要としない，Green関数を用いたBIEMによる固有値計算を論じている．

しかし，BIEMを用いて固有値計算を行う際には，解決しなければならないいくつかの問題がある．実際，BIEMの高い計算コストの軽減は必須であるし，BIEMでは固有値問題は必ず非線形固有値問題に帰着されるので，効率のよい非線形固有値問題の解法が必要となる．本論文ではこれらの問題を解決するために，導波路問題に対する高速多重極BIEM(Fast Multipole BIEM, FM-BIEM)を定式化し，周回積分型非線形固有値解法である櫻井-杉浦法(Sakurai-Sugiura projection Method, SSM)を組みあわせた固有値計算手法を提案している．またBIEMでは，複素数の範囲では考える境界値問題に関係のない見かけの固有値が存在しうることも問題となる．本論文ではこの問題への対策として，transmission問題の複素数の見かけの固有値を真の固有値と見分ける簡単な方法を示している．本論文はこうして得られた固有値問題の解法を用いて，transmission問題の各種BIEMの見かけ固有値の分布と解析精度との関係を調べ，いわゆる単一積分方程式が優れた精度と収束性を有することを示している．

本論文は，以下の5章から成る．第1章では本論文の研究背景や概要，および構成を概観している．これまでBIEMを用いた有界領域の固有値の決定や，実数の見かけの固有値に関する研究は多数行われているが，BIEMを用いて開空間の複素固有値問題を扱った研究は極めて少なく，特にtransmission問題の見かけの固有値問題の対策とそれにより得られる知見に関しては，類似する研究がほとんど見当たらないこと，PMCHWTやMüllerの定式化は見かけの固有値を持たない解法として捉えられることが多く，これらが複素固有値を持つことの意味はほとんど検討されていないことなどが述べられている．

第2章では，2次元Helmholtz方程式における導波路問題のGreen関数を用いたFM-BIEMの定式化と，SSMを組み合わせた固有値計算手法が提案されている．まず，導波路問題のGreen関数は，鏡像法とFMMにおけるM2L公式を用いて効率よく計算できることを示し，これを用いて実数の周波数に対する導波路のFM-BIEMを定式化している．また，必要な格子和の計算を行い，SSMを概説したのち，FM-BIEMの複素周波数への解析接続を考察して，その分枝カットを特定している．またSSMを使用する上での数値的

な注意事項について述べている．次に，数値計算によって提案手法の精度や計算効率が良好であること，従来困難であったカットオフ周波数に非常に近い固有値の精度良い計算が可能であること，PMLを用いた有限要素法による計算結果に比較して，偽固有値(見かけの固有値とは異なる)を得ることが極めて稀であること，しかし故意にGreen関数の分枝カットを跨ぐ積分経路を用いてSSMを実行すると，分枝カットの位置に偽固有値が得られることなどが示されている．さらに，数値実験により，得られた複素固有値の実部が透過率のピークの周波数に非常に近いこと，ストップバンドは虚部の小さな2つの複素固有値の間に生ずる傾向があることなどを示している．しかし，従来の積分方程式の定式化を用いる限り，見かけの固有値の問題が発生しうることを指摘している．

第3章では，transmission問題の見かけの固有値の問題を検討し，その簡単な解決法を示している．まず，2次元Helmholtz方程式の導波路におけるtransmission問題を取り上げ，PMCHWTやMüllerの定式化の見かけの固有値を特定し，それらは従来の積分方程式の定式化では，元来求めたい導波路問題の真の固有値と同様に複素下半平面に現れ，真の固有値と見かけの固有値を見分けることが困難であることを指摘している．次に，従来の積分方程式の積分核を修正し，内部問題の積分方程式において通常の外向き放射条件でなく内向きの放射条件を満たす基本解を用いると，見かけの複素固有値が上半平面に得られるため，下半平面に現れる真の固有値と見分けることが可能になることを示している．また，修正された積分方程式は計算効率においても従来法と比較して遜色はなく，実数に近い周波数では従来法がやや優れるものの，虚部の大きい周波数では修正された解法がより高速であることが示されている．次に，この手法を3次元全空間中のMaxwell方程式のtransmission問題へ拡張し，PMCHWTとMüllerの定式化の固有値は，見かけの固有値まで含めて等しいことを示した後に，数値計算により提案手法によって真と見かけの固有値を区別することが可能であることを実証している．また，計算効率についてもHelmholtz方程式の場合とほとんど同じような傾向であることを示している．加えて，PMCHWTやMüllerの定式化は，虚部の非常に小さな見かけの複素固有値を持ち，それらに近い実数周波数においてBIEMの解析精度が悪化することがあり得ることを指摘している．

第4章では，見かけの複素固有値分布に基づく様々なBIEMの実数周波数における解析精度を検討している．具体的には，Kleinman-Martinの単一積分方程式(Single Integral Equation，SIE)を取り上げ，その見かけの固有値は外部Dirichlet問題と内部インピーダンス問題の固有値となることを指摘している．特に後者の固有値は有名なBurton-Millerの積分方程式の固有値と同一であって，SIEに現れるパラメータを調節することによってその虚部の大きさをコントロールすることができ，この観点から有効なパラメータの決定法を論じている．次に数値計算により，SIEの見かけの固有値はPMCHWTやMüllerの定式化に比べて確かに実軸から大きく離れており，PMCHWTやMüllerの定式化で見られた実数周波数における精度の悪化や，GMRESなどの反復解法の反復回数の増加を回避できることを示している．さらに，SIEは計算効率の上でも他の解法以上の優れた特性を持っていることを示している．

第5章では，各章で得られた結論と今後に残された課題がまとめられている．特に今後の課題として，３次元問題，インピーダンス境界条件，弾性体問題，水の波，分散性物質の問題などへの拡張，高速直接解法の利用，見かけの固有値の実軸からの距離に注目した誤差解析などが挙げられている．

注）論文内容の要旨と論文審査の結果の要旨は１頁を３８字×３６行で作成し、合わせて、３,０００字を標準とすること。
論文内容の要旨を英語で記入する場合は、４００～１,１００wordsで作成し
審査結果の要旨は日本語５００～２,０００字程度で作成すること。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

本論文は，導波路問題を含む，開空間の波動散乱問題の固有値の境界積分方程式法(Boundary Integral Equation Method, BIEM)による数値計算を論じたものである.

導波路問題の共鳴周波数を求める固有値問題はこれまで物理学や工学において多数研究されている. これらは主に実固有値を対象としているが，導波路などの無限領域中の波動散乱問題には複素固有値も存在し，これらもまた物理現象に影響を与える興味深い研究対象である. しかしこれらの複素固有値を数値的に決定するためには無限遠方において解が指数的に増大する形の放射条件を扱う必要があるので，Green関数を用いたBIEMによる固有値計算法が有力である.

本論文は高速BIEMと，周回積分型非線形固有値解法である櫻井-杉浦法(Sakurai-Sugiura projection Method, SSM)とを用いて開空間の固有値問題を解く方法を論じたものである. まず2次元Helmholtz方程式の導波路問題に対する高速多重極BIEM(Fast Multipole BIEM, FM-BIEM)を開発し，SSMと組み合わせることによって固有値問題を解く方法を提案した. 更に求められた複素固有値が物理現象に密接に関連していることも示した. しかし，このような方法で求められる固有値には真の固有値だけでなく，見かけの固有値も含まれる. そこで本論文では，transmission問題の複素数の見かけの固有値を真の固有値と見分ける簡単な方法を提案し，その有効性を2次元Helmholtz方程式の導波路問題と3次元Maxwell方程式の波動散乱問題において数値的に実証した. 更に得られた固有値問題の解法を用いて，transmission問題の各種BIEMの見かけ固有値の分布と解析精度との関係を調べ，いわゆる単一積分方程式(SIE)が特に優れた精度と収束性を有することを示した.

これまでBIEMを用いた有界領域の固有値の決定や，実数の見かけの固有値に関する研究は行われているが，開空間の複素固有値問題を扱った研究は極めて少なく，特にtransmission問題の見かけの固有値問題の対策とそれにより得られる知見に関しては，類似する研究がほとんど見当たらない. 実際，PMCHWTやMüllerの定式化はこれまで見かけの固有値を持たない解法として捉えられることが多く，これらが複素固有値を持つことの意味はほとんど検討されてこなかったと言っても過言でない. このような状況で本論文がこれらの算法の見かけの固有値を特定し，真の固有値と見かけの固有値を分離する手法を提案したことは学術的にも実用的にも意義が大きいと言える. 特に見かけの固有値の分離法は原理が明快で実装が容易な上に，効果も明白であると評価できる. 更にSIEの精度や収束性に関する検討は，積分方程式の数値的特性に関する新しい視点を提供するものとして評価できる. 加えて，導波路の高速多重極法の開発や，得られた複素固有値と実現象の対応に関する知見は，それ単体としても十分学術的価値を認めることができる. 以上のことから，本論文は博士(情報学)の学位論文として価値あるものとを認める. また，平成29年2月10日，論文内容とそれに関連した口頭試問を行った結果合格と認めた.

注）論文審査の結果の要旨の結句には、学位論文の審査についての認定を明記すること。
更に、試問の結果の要旨（例えば「平成　年　月　日論文内容とそれに関連した口頭試問を行った結果合格と認めた。」）を付け加えること。

Webでの即日公開を希望しない場合は、以下に公開可能とする日付を記入すること。
要旨公開可能日：　　　　年　　　月　　　日以降